

# Un contraejemplo al Problema 19 de Ulam del Cuaderno Escocés

por

M. Angeles Alfonseca y Eugenia Saorín Gómez

RESUMEN. En el problema 19 del Cuaderno Escocés, Ulam pregunta si es cierto que un conjunto convexo y compacto de densidad constante que flota en equilibrio en cualquier orientación debe ser necesariamente esférico. Este problema ha sido resuelto recientemente por Dmitry Ryabogin, que ha construido un contraejemplo. En este artículo presentamos la historia del problema, las ideas principales de la teoría de flotación de cuerpos y del mencionado contraejemplo, y algunos problemas relacionados.

## 1. INTRODUCCIÓN

El estudio del equilibrio de los cuerpos que flotan en un líquido se remonta a Arquímedes, que formuló su famoso Principio:

«Un cuerpo total o parcialmente sumergido en un líquido en reposo experimenta un empuje vertical hacia arriba igual al peso del líquido desalojado».

Si la densidad del líquido es 1 y la densidad del cuerpo  $K$  es  $\delta$ , por el Principio de Arquímedes se tiene que el volumen de la parte sumergida de  $K$  es  $\delta \text{vol}_n(K)$ . Arquímedes determinó las posiciones de equilibrio de esferas, cilindros y cuerpos parabólicos que flotan en el agua.

El estudio matemático de la teoría de flotación avanzó considerablemente durante los siglos XVIII y XIX gracias a matemáticos como Euler, Bouguer y Dupin. Charles Dupin (1784–1873), que además de matemático era ingeniero naval, escribió un tratado [6] en el que formuló sistemáticamente las leyes físicas que gobiernan el equilibrio de los cuerpos flotantes, demostrando teoremas nuevos y compendiando otros obtenidos por Euler y Bouguer un siglo antes.

Llegando al siglo XX, es bien conocida la historia del *Cuaderno Escocés*. Según cuenta Ulam en el prólogo a su traducción al inglés del Cuaderno, sus orígenes se remontan a 1935. Los matemáticos de la ciudad de Lwów (el cuaderno usa el nombre polaco de la ciudad, llamada Lviv en ucraniano) se reunían en un café llamado “The Scottish Coffee House” y discutían problemas de matemáticas. Stefan Banach fue quien sugirió mantener un registro de dichos problemas, para lo cual compró un cuaderno grande que dio al camarero del café, quien lo guardaría en un lugar seguro y lo pondría en la mesa de quien preguntara por él. El lector interesado puede consultar la página web [30], donde se puede descargar una copia de la traducción de Ulam, con

el permiso de la profesora Alina Banach y del Archivo de la biblioteca de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Wrocław (propietario del manuscrito).

El problema 19, propuesto por Stanisław Ulam, pregunta lo siguiente:

«*Un sólido de densidad uniforme que flota en el agua en equilibrio en cualquier posición, ¿debe ser esférico?*»

Ulam reformula el problema del modo siguiente en el libro [25, pg. 38]:

«*Si un sólido convexo  $K$  en  $\mathbb{R}^3$  de densidad uniforme  $\delta$ , con  $0 < \delta < 1$ , flota en equilibrio en cualquier orientación en un líquido de densidad 1, ¿es  $K$  necesariamente esférico?*»

Rolf Schneider en 1970 y Kenneth Falconer en 1983 dieron una respuesta afirmativa en el caso en que el cuerpo convexo tiene simetría central y densidad  $1/2$ , usando la teoría de armónicos esféricos [19, 8]. La generalización de este resultado a dimensión  $n$  se debe a Florentin, Schütt, Werner y Zhang [9]. Utilizando métodos numéricos, Várkony [26] ha construido ejemplos de cuerpos tridimensionales no convexos de densidad  $1/2$  que flotan en equilibrio en cualquier orientación.

Ochenta años después del planteamiento del problema, Dmitry Ryabogin ha construido un cuerpo convexo no esférico de densidad  $1/2$  que flota en equilibrio en cualquier orientación [17], y por tanto da una respuesta negativa a la pregunta planteada por Ulam en la clase de los cuerpos convexos. Aunque el problema original consideraba únicamente cuerpos tridimensionales, la construcción del contraejemplo es en todas las dimensiones a partir de tres. Para densidades distintas a  $1/2$ , el problema sigue abierto en general.

En este artículo presentamos las ideas fundamentales de la solución de Ryabogin. En la Sección 2, demostramos los tres teoremas de Dupin que proporcionan las ecuaciones matemáticas que cumplen los cuerpos flotantes. Gracias a ellos, la condición de flotar en equilibrio se puede reformular del modo siguiente:

«*Un cuerpo convexo  $K$  de densidad constante flota en equilibrio en todas direcciones si y solo si las secciones de  $K$  por cada uno de los planos de la superficie del líquido tienen todos sus momentos de inercia iguales y constantes en todas direcciones.*»

En la Sección 3, mostramos cómo la reformulación anterior permite escribir un sistema de ecuaciones integrales que gobierna la flotación en equilibrio. Gracias a este sistema de ecuaciones, el contraejemplo se construye usando el mismo método utilizado previamente por Nazarov, Ryabogin y Zvavitch [14] para resolver negativamente un problema independiente propuesto por Klee. En ambos casos, el contraejemplo consiste en un cuerpo de revolución muy próximo a la esfera unidad, obtenido como solución perturbada de un sistema de ecuaciones integro-diferenciales para el que la esfera unidad constituye la solución sin perturbar. En el problema de Ulam, este sistema se deriva de los Teoremas de Dupin.

En la Sección 4 presentamos brevemente algunos problemas y resultados relacionados: la versión bidimensional del problema de Ulam, la demostración de Falconer mencionada anteriormente y los problemas del llamado “cuerpo de flotación” asociado a un cuerpo convexo.

## 2. LOS TEOREMAS DE DUPIN SOBRE LA FLOTACIÓN

Introducimos a continuación la notación que usaremos en el resto del artículo. El espacio ambiente es  $\mathbb{R}^n$  dotado de la estructura euclídea clásica, con la base ortonormal estándar  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Para  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , el producto escalar es  $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ , y la norma euclídea es  $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ . La notación  $dx, dq$ , etc, representará la medida de Lebesgue en el espacio o subespacio afín ambiente. La esfera unidad de  $\mathbb{R}^n$  es  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ . Si  $\xi$  es un vector unitario y  $t \in \mathbb{R}$ , el hiperplano (afín) ortogonal a  $\xi$  que se encuentra a distancia  $|t|$  del origen en la dirección de  $\xi$  se define como

$$H(\xi, t) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \xi = t\}.$$

Este hiperplano divide a  $\mathbb{R}^n$  en dos semiespacios

$$H^+(\xi, t) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \xi \geq t\} \text{ y } H^-(\xi, t) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \xi \leq t\}.$$

Un cuerpo  $K \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$  cuyo interior es no vacío. Decimos que  $K$  es convexo si para todo par de puntos  $x, y \in K$ , el segmento  $[x, y]$  está contenido en  $K$ .

En el resto del artículo, supondremos que el líquido tiene densidad 1, y el cuerpo convexo  $K$  que flota en él tiene volumen 1 y densidad  $\delta \in (0, 1/2]$ . La superficie del líquido se representa por medio del hiperplano  $H(\xi, t(\xi))$ , y la parte sumergida de  $K$  es  $K \cap H^-(\xi, t(\xi))$ , donde  $t(\xi)$  es el único número real tal que

$$\text{vol}_n(K \cap H^-(\xi, t(\xi))) = \delta. \quad (1)$$

Para simplificar la notación, puesto que la densidad  $\delta$  ha sido fijada, a partir de ahora denotaremos a dicho hiperplano simplemente por  $H(\xi)$  y al semiespacio por  $H^-(\xi)$ , omitiendo  $t(\xi)$ . Llamaremos al conjunto de hiperplanos  $\{H(\xi)\}_{\xi \in S^{n-1}}$  que satisfacen la ecuación (1) los *hiperplanos de corte*.

El centro de masas de un cuerpo  $K \subset \mathbb{R}^n$  viene dado por

$$\mathcal{C}(K) = \frac{1}{\text{vol}_n(K)} \int_K x \, dx. \quad (2)$$

La siguiente definición es una conocida ley de la hidrostática (véase [4, Capítulo XXIV]).

**DEFINICIÓN 1.** *El cuerpo  $K$  flota en equilibrio en la orientación dada por  $\xi \in S^{n-1}$  si la línea recta que une el centro de masas de  $K$  con el centro de masas de la parte sumergida  $K \cap H^-(\xi)$  es perpendicular a la superficie  $H(\xi)$  del líquido, y por tanto, es paralela a  $\xi$ .*

En la Figura 1 se observa un cuerpo que no flota en equilibrio en la orientación mostrada.

Para un cuerpo  $K$  y una dirección  $\xi \in S^{n-1}$ , denotaremos por  $\mathcal{C}_\delta(\xi)$  el centro de masas de la parte sumergida en el líquido, esto es,

$$\mathcal{C}_\delta(\xi) = \frac{1}{\text{vol}_n(K \cap H^-(\xi))} \int_{K \cap H^-(\xi)} x \, dx.$$

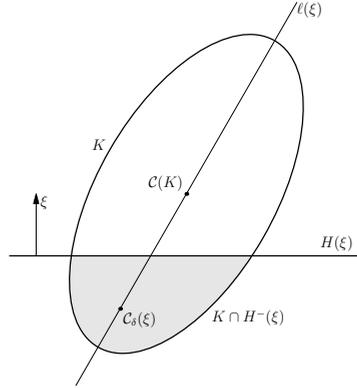


Figura 1: El cuerpo  $K$  no flota en equilibrio en la dirección  $\xi$  porque la recta que une  $\mathcal{C}(K)$  y  $\mathcal{C}_\delta(\xi)$  no es paralela al vector  $\xi$ .

DEFINICIÓN 2. Dado un cuerpo  $K$  de volumen 1 y densidad  $\delta$ , la superficie de centros de  $K$  es el lugar geométrico de los centros de masas de la parte sumergida de  $K$  en cada dirección, i.e.,

$$\mathcal{S} = \{\mathcal{C}_\delta(\xi) : \xi \in S^{n-1}\}.$$

La Figura 2 muestra, en el caso  $n = 2$ , la superficie de centros de un cuadrado de lado 1 centrado en el origen, y que tiene densidad  $1/10$ . La superficie de centros ha aparecido también en la literatura con el nombre de metronoide (véase [12]).

OBSERVACIÓN 1. Huang, Slomka y Werner demuestran en dicho artículo [12, Teorema 1.2] que la superficie de centros de un cuerpo convexo es al menos de clase  $C^1$ . Usaremos este resultado más adelante.

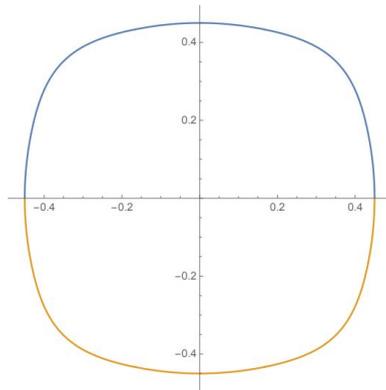


Figura 2: Superficie de centros bidimensional de un cuadrado de densidad  $1/10$  y con lado de longitud 1, que flota en un líquido de densidad 1.

La superficie de centros es especialmente útil para caracterizar los cuerpos que flotan en equilibrio en todas direcciones, debido al siguiente resultado.

**PROPOSICIÓN 1.** *Si un cuerpo convexo  $K$  flota en equilibrio en cualquier orientación, su superficie de centros  $\mathcal{S}$  es una esfera.*

*Recíprocamente, si la superficie de centros  $\mathcal{S}$  de  $K$  es una esfera con centro  $\mathcal{C}(K)$ , entonces  $K$  flota en equilibrio en cualquier orientación.*

Demostraremos este resultado fácilmente como corolario del primer teorema de Dupin, siguiendo el método del artículo [18, Lema 1].

### 2.1. LOS TEOREMAS DE DUPIN

A continuación presentamos las ideas geométricas de las demostraciones de los teoremas de Dupin, y remitimos a los lectores que deseen un mayor detalle al artículo [18] o al libro [4, Capítulo XXIV].

**TEOREMA 2. (Primer Teorema de Dupin)** *Dado un hiperplano de corte  $H(\xi)$  y el correspondiente centro de masas de la parte sumergida  $\mathcal{C}_\delta(\xi)$ , consideramos el hiperplano tangente  $\tilde{H}(\xi)$  a la superficie de centros  $\mathcal{S}$  que pasa por el punto  $\mathcal{C}_\delta(\xi)$ . Entonces  $H(\xi)$  y  $\tilde{H}(\xi)$  son paralelos.*

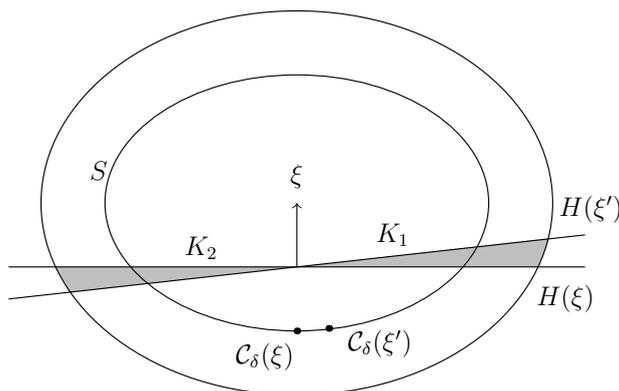


Figura 3: Primer Teorema de Dupin

**DEMOSTRACIÓN.** Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la superficie del líquido  $H(\xi)$  es horizontal, es decir,  $\xi = e_n$ . Consideremos un vector  $\xi' \in S^{n-1}$  próximo a  $\xi$ . Se observa que las dos cuñas  $K_1$  y  $K_2$  situadas entre los dos hiperplanos de corte tienen el mismo volumen, pues para ambos hiperplanos la parte sumergida de  $K$  tiene volumen  $\delta$ . Por tanto, el centro de masas  $\mathcal{C}_\delta(\xi') \in \mathcal{S}$  tiene que estar situado “más arriba” que  $\mathcal{C}_\delta(\xi)$  (véase la Figura 3); más precisamente, la  $n$ -ésima coordenada del centro de masas  $\mathcal{C}_\delta(\xi') \in \mathcal{S}$  es mayor que la coordenada correspondiente de  $\mathcal{C}_\delta(\xi)$ .

Puesto que  $\xi'$  es arbitrario, si el plano  $\tilde{H}(\xi)$  tangente a  $\mathcal{S}$  en el punto  $\mathcal{C}_\delta(\xi)$  está bien definido, tiene que ser horizontal y por tanto paralelo a superficie del líquido

$H(\xi)$ . Pero debido a la Observación 1, sabemos que la superficie de centros de un cuerpo convexo es al menos de clase  $C^1$ , lo que garantiza la existencia de un único plano tangente  $\tilde{H}(\xi)$ . Esto concluye la demostración.  $\square$

Así como el primer teorema de Dupin nos proporciona información sobre los centros de masas de las partes sumergidas de  $K$ , el segundo teorema de Dupin trata sobre los centros de masas de las secciones de  $K$  por los hiperplanos de corte.

**TEOREMA 3. (Segundo Teorema de Dupin)** *Sea un cuerpo  $K$  y una sucesión de vectores unitarios  $\xi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \xi$  tal que los correspondientes hiperplanos de corte satisfacen que  $\lim_{\xi_j \rightarrow \xi} H(\xi_j) \cap H(\xi) = \Pi$  existe, donde  $\dim \Pi = n - 2$ . Entonces el centro de masas  $\mathcal{C}(K \cap H(\xi))$  de la sección  $K \cap H(\xi)$  se encuentra en el subespacio  $\Pi$ .*

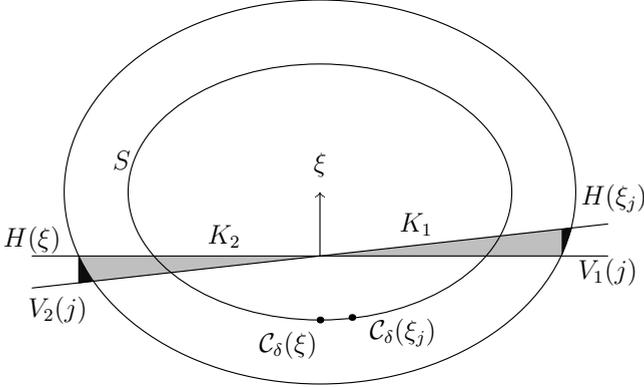


Figura 4: Segundo Teorema de Dupin

**DEMOSTRACIÓN.** De nuevo, suponemos que la superficie del líquido  $H(\xi)$  es horizontal, es decir,  $\xi = e_n$ , y consideramos un vector  $\xi_j$  próximo a  $\xi$ , formando un ángulo  $\varepsilon_j > 0$  con la horizontal. Denotemos por  $\Pi_j = H(\xi) \cap H(\xi_j)$ , que es un subespacio de dimensión  $n - 2$ . Modificando la base de  $\mathbb{R}^n$  a medida que variamos  $j$ , podemos suponer que  $\Pi_j$  pasa por el origen de coordenadas y está generado por  $\{e_2, \dots, e_{n-1}\}$ . Con esta elección de base, es suficiente demostrar que la primera coordenada del centro de masas de  $K \cap H(\xi)$  es cero.

La suma de los volúmenes de las cuñas  $K_1$  y  $K_2$  (de color gris claro en la Figura 3) se puede calcular con la expresión

$$\frac{1}{n} \int_{K \cap H(\xi)} x_1 \tan \varepsilon_j dx + E_j, \quad (3)$$

donde el término de error  $E_j$  consiste en los volúmenes de las regiones de color negro  $V_1(j)$  y  $V_2(j)$  de la Figura 4, cada una con signo apropiado. Como el volumen de las cuñas  $K_1$  y  $K_2$  tiende a cero cuando  $j \rightarrow \infty$ , usando la ecuación (3), obtenemos que

$$\frac{1}{n} \int_{K \cap H(\xi)} x_1 dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \left( -\frac{E_j}{\tan \varepsilon_j} \right).$$

La parte izquierda de la ecuación anterior es, salvo una constante, la primera coordenada del centro de masas de  $K \cap H(\xi)$ . Es suficiente, pues, demostrar que los volúmenes de  $V_1(j)$ ,  $V_2(j)$  tienden a cero más deprisa que  $\tan \varepsilon_j$ . Es posible demostrar, como sugiere la figura, que la medida  $(n - 1)$ -dimensional de las “bases” de  $V_1(j)$  y  $V_2(j)$  tiende a cero cuando  $\xi_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi$ , mientras que su altura es menor que  $D \tan \varepsilon_j$ , donde  $D$  es el diámetro de  $K$ . Esto prueba que la primera coordenada del centro de masas de  $K \cap H(\xi)$  es cero, y con ello el teorema está demostrado. □

El tercer teorema de Dupin establece la relación entre las curvaturas de la superficie de centros en un punto  $\mathcal{C}_\delta(\xi)$  y los momentos de inercia de la sección  $K \cap H(\xi)$ . Para poder enunciarlo con precisión necesitamos introducir las definiciones de momento de inercia y metacentro.

Dado un hiperplano de corte  $H(\xi)$ , consideramos un subespacio afín cualquiera  $\Pi$ , de dimensión  $n - 2$ , contenido en  $H(\xi)$  y que pase por el centro de masas  $\mathcal{C}(K \cap H(\xi))$  de la sección  $K \cap H(\xi)$ . Elegimos una base ortonormal de tal forma que  $\xi^\perp = \text{span} \{ \eta_1, \dots, \eta_{n-1} \}$ ,

$$\Pi = \mathcal{C}(K \cap H(\xi)) + \text{span} \{ \eta_1, \dots, \eta_{n-2} \} \quad \text{y} \quad H(\xi) = \mathcal{C}(K \cap H(\xi)) + \xi^\perp.$$

Por último para cada punto  $q \in K \cap H(\xi)$  definimos  $r(q)$  como la distancia de  $q$  a  $\Pi$ .

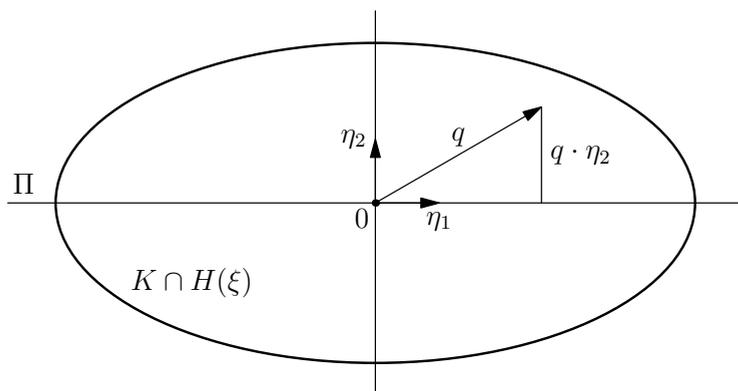


Figura 5: Momento de inercia en el caso tridimensional.

DEFINICIÓN 3. En las condiciones anteriores, el momento de inercia  $I_{K \cap H(\xi)}(\Pi)$  de  $K \cap H(\xi)$  con respecto a  $\Pi$  se obtiene sumando  $r^2(q)$  para cada “partícula”  $q$  del conjunto  $K \cap H(\xi)$ :

$$I_{K \cap H(\xi)}(\Pi) = \int_{K \cap H(\xi)} r^2(q) dq = \int_{K \cap H(\xi) - \mathcal{C}(K \cap H(\xi))} (u \cdot \eta_{n-1})^2 du. \quad (4)$$

En la Figura 2.1,  $\Pi$  es el eje  $\eta_1$ , y el centro de masas  $\mathcal{C}(K \cap H(\xi))$  es el origen.

DEFINICIÓN 4. Dada una superficie  $\mathcal{M}$  de clase  $C^2$ , un punto  $C \in \mathcal{M}$  y una dirección  $\eta$  del hiperplano tangente a  $\mathcal{M}$  en  $C$ , el metacentro  $m_{C(\eta)}$  en el punto  $C$  y con dirección  $\eta$  es el centro de curvatura de la curva  $\gamma = \Pi \cap \mathcal{S}$ , siendo  $\Pi$  el plano de dimensión 2 que contiene a  $\eta$  y al vector normal a  $\mathcal{M}$  en el punto  $C$ .

Equivalentemente, el metacentro  $m_C(\eta)$  de  $\mathcal{M}$  en el punto  $C \in \mathcal{M}$  es el punto situado sobre la recta normal a  $\mathcal{M}$  en el punto  $C$ , cuya distancia a  $C$  es el radio de la curvatura normal de  $\mathcal{M}$  en el punto  $C$  y en la dirección  $\eta$ . Denotaremos este radio por  $\mathcal{R}_C(\eta)$ .

Remitimos al lector que desee consultar las definiciones de curvatura normal y radio de curvatura al libro de Do Carmo [5, Capítulo 3, Def. 3].

TEOREMA 4. (**Tercer Teorema de Dupin**) Dado  $K$  un cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ ,  $\xi \in S^{n-1}$  tal que  $H(\xi)$  es un hiperplano de corte y  $\mathcal{C} := \mathcal{C}_\delta(\xi) \in \mathcal{S}$  el centro de masas de la correspondiente parte sumergida, consideramos una sucesión de hiperplanos de corte  $\{H(\xi_k)\}_{k=1}^\infty$  que convergen a  $H(\xi)$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Si para esta sucesión el límite  $\lim_{k \rightarrow \infty} H(\xi) \cap H(\xi_k) = \Pi$  existe, entonces para la correspondiente sucesión de centros de masas  $\{\mathcal{C}_\delta(\xi_k)\}$ , con  $\mathcal{C} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{C}_\delta(\xi_k)$ , se tiene que

$$\mathcal{R}_{\mathcal{C}(\zeta)} := \text{dist}(\mathcal{C}, m_{\mathcal{C}}(\zeta)) = \frac{1}{\delta} I_{K \cap H(\xi)}(\Pi) \quad (5)$$

donde

$$\zeta := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\overrightarrow{\mathcal{C}_\delta(\xi_k)\mathcal{C}}}{|\overrightarrow{\mathcal{C}_\delta(\xi_k)\mathcal{C}}|}.$$

DEMOSTRACIÓN. Daremos solamente la idea general. La demostración completa se puede leer en [18, Teorema 5]. Para simplificar la exposición, el lector puede suponer que la superficie de centros  $\mathcal{S}$  es de clase  $C^2$  y todos los parámetros están bien definidos.

Sea  $\Pi$  un subespacio afín de dimensión  $n - 2$  que pasa por el centro de masas  $\mathcal{C}(H(\xi) \cap K)$ , y sea  $\Gamma$  el subespacio paralelo a  $\Pi$  que contiene el origen. Proyectamos la superficie de centros  $\mathcal{S}$  sobre el subespacio  $\Pi^\perp$  (de dimensión 2), y parametrizamos su frontera mediante  $\rho(\theta) = (\rho_1(\theta), \rho_2(\theta))$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Similarmente, parametrizamos el círculo unidad de  $\Pi^\perp$  por  $\xi(\theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Consideremos el valor de  $\theta$  correspondiente a que la superficie del líquido sea horizontal, de modo que el vector  $\xi(\theta) = e_2 = (0, 1)$ , y el correspondiente vector tangente al círculo unidad es  $\xi'(\theta) = (-1, 0)$ . Nótese que el vector tangente  $\rho'(\theta)$  es paralelo al hiperplano tangente a  $\mathcal{S}$  en el punto  $\mathcal{C}_\delta(\xi(\theta))$ ,

que denotaremos por  $\tilde{H}(\xi(\theta))$ . Puesto que, por el primer teorema de Dupin,  $\tilde{H}(\xi(\theta))$  es paralelo al hiperplano horizontal  $H(\xi(\theta))$ , obtenemos que  $\rho'_2(\theta) = 0$ .

Por otro lado, consideremos un vector  $\xi_k = \xi(\theta_k)$  próximo a  $\xi(\theta)$ . Denotando las coordenadas del subespacio  $H(\xi(\theta)) \cap H(\xi(\theta_k))$  por  $(p_1, \dots, p_{n-2})$ , tenemos (por la definición de la superficie de centros) que

$$\begin{aligned} \rho_1(\theta_k) - \rho_1(\theta) &= \frac{1}{\delta} \left( \int_{K \cap H^-(\xi(\theta_k))} p_{n-1} dp - \int_{K \cap H^-(\xi(\theta))} p_{n-1} dp \right) \\ &= \frac{1}{\delta} \left( \int_{K \cap H(\xi(\theta))} p_{n-1}^2 \tan(\theta_k - \theta) dp \right) + E, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene de modo similar a la ecuación (3), y al igual que en ella, se puede demostrar que el término de error  $E$  tiende a cero más rápido que  $\theta_k - \theta$ . Dividiendo ambos miembros por  $\theta_k - \theta$  y pasando al límite cuando  $\theta_k$  tiende a  $\theta$ , obtenemos  $\rho'_1(\theta) = \frac{1}{\delta} I_{K \cap H(\theta)}(\Pi)$  o, en forma vectorial,

$$\rho'(\theta) = -\frac{1}{\delta} I_{K \cap H(\theta)}(\Pi) \xi'(\theta). \tag{6}$$

Como  $\xi'(\theta)$  es la derivada del vector  $\xi(\theta)$ , la conclusión (5) es una consecuencia inmediata de (6) utilizando el teorema de Olinde Rodrigues [5, Cap. 3, Prop. 3].  $\square$

Antes de pasar a aplicar los Teoremas de Dupin para resolver el problema de Ulam, mostramos su utilidad para probar la Proposición 1 (como corolario del primer Teorema de Dupin), y el Teorema 5, que caracteriza el problema de Ulam por medio de los momentos de inercia.

DEMOSTRACIÓN. (PROPOSICIÓN 1)

Supongamos que  $\mathcal{S}$  es una esfera con centro  $\mathcal{C}(K)$ . Puesto que todas las rectas normales a  $\mathcal{S}$  pasan por  $\mathcal{C}(K)$ , el primer teorema de Dupin implica que cada recta que contiene a  $\mathcal{C}(K)$  y a  $\mathcal{C}_\delta(\xi)$  es perpendicular a la superficie del líquido  $H(\xi)$ , de donde se obtiene que  $K$  flota en equilibrio en cualquier orientación.

Recíprocamente, supongamos que  $K$  flota en equilibrio en cualquier orientación. Entonces la recta  $l(\xi)$  que pasa por  $\mathcal{C}(K)$  y por  $\mathcal{C}_\delta(\xi)$  es perpendicular a  $H(\xi)$ . Por el primer teorema de Dupin, puesto que el hiperplano  $H(\xi)$  y el hiperplano  $\tilde{H}(\xi)$  tangente a  $\mathcal{S}$  en  $\mathcal{C}_\delta(\xi)$  son paralelos para todo  $\xi \in S^{n-1}$ , se sigue que  $l(\xi)$  es la recta normal a  $\mathcal{S}$  en el punto  $\mathcal{C}_\delta(\xi)$  para todo  $\xi \in S^{n-1}$ .

Consideremos un plano bidimensional  $\Pi$  que contenga los puntos  $\mathcal{C}_\delta(\xi)$  y  $\mathcal{C}(K)$ . Puesto que la curva  $\mathcal{S} \cap \Pi$  es de clase  $C^1$  por la Observación 1, y, como hemos visto, en cada punto la recta normal es perpendicular a la tangente, debe ser un círculo. Dado que el plano  $\Pi$  es arbitrario, obtenemos que  $\mathcal{S}$  es una esfera.  $\square$

TEOREMA 5. *Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo de volumen 1, donde  $n \geq 3$ , y sea  $\delta \in (0, 1/2]$ . Si  $K$  flota en equilibrio al nivel  $\delta$  en cualquier orientación, entonces para todo hiperplano de corte  $H(\xi)$ , con  $\xi \in S^{n-1}$  y para todo plano  $(n-2)$ -dimensional  $\Pi \subset H(\xi)$  que pasa por el centro de masas de  $K \cap H(\xi)$ , las secciones  $K \cap H(\xi)$  tienen momentos de inercia  $I_{K \cap H(\xi)}(\Pi)$  iguales e independientes de  $\xi$  y  $\Pi$ .*

*Recíprocamente, si el centro de masas de  $K$  coincide con el centro de masas de su superficie de centros  $\mathcal{S}$ , y todas las secciones  $K \cap H(\xi)$  tienen momentos de inercia iguales e independientes de  $\xi$  y  $\Pi$ , entonces  $K$  flota en equilibrio al nivel  $\delta$  en cualquier orientación.*

En efecto, si los momentos de inercia son iguales en todo punto y dirección, del Tercer teorema de Dupin se sigue que todos los radios de curvatura normal de  $\mathcal{S}$  son iguales, y por tanto es una esfera. De la Proposición 1 se sigue entonces que  $K$  flota en equilibrio en todas direcciones. El recíproco se obtiene de modo análogo.

### 3. EL CONTRAEJEMPLO DE RYABOGIN

Los ingredientes principales de la construcción del contraejemplo son:

- El contraejemplo es un cuerpo de revolución  $K$ , que será obtenido como una pequeña perturbación de la esfera unidad.
- Dentro de la clase de los cuerpos convexos de revolución, las condiciones dadas por los Teoremas de Dupin se pueden reescribir como un sistema de tres ecuaciones integro-diferenciales con tres incógnitas, que tiene una solución trivial (la esfera). En principio, podría parecer que la solución al problema de Ulam debería ser afirmativa. Sin embargo, Ryabogin notó que dos cualesquiera de estas tres ecuaciones implican la tercera de ellas (véase [17, Lema 4]), y precisamente esta observación le condujo a buscar el contraejemplo.
- Así, basta comprobar que dicho sistema admite también una solución en el caso en que  $K$  es una pequeña perturbación de la esfera.

Este mismo método fue usado anteriormente por Nazarov, Ryabogin y Zvavitch en [14] para resolver el siguiente problema de Klee. Dado un cuerpo convexo  $K \subset \mathbb{R}^n$  y una dirección  $\xi \in S^{n-1}$ , se consideran todas las secciones de  $K$  por hiperplanos perpendiculares a  $\xi$ , y se define  $M_K(\xi)$  como el máximo de los volúmenes  $(n-1)$ -dimensionales de dichas secciones. Klee preguntó en 1969 si la condición de que  $M_K(\xi)$  sea una función constante en  $\xi$  implica que  $K$  es la bola euclídea. El contraejemplo de [14] es un cuerpo de revolución obtenido por el procedimiento indicado más arriba, perturbando la esfera unidad por medio de un sistema de ecuaciones integro-diferenciales que caracterizan el problema (naturalmente, las ecuaciones del problema de Klee son distintas que las del problema de Ulam).

Comencemos a describir la construcción del contraejemplo para Ulam. Dada una función real de una variable  $f(x)$  definida en un intervalo  $[-R_1, R_2]$ , cóncava, no negativa y con  $f(-R_1) = 0 = f(R_2)$ , definimos el cuerpo convexo de revolución  $K_f$  mediante

$$K_f = \{x \in \mathbb{R}^n : x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq f(x_1)^2\},$$

donde el eje de revolución es el eje correspondiente a la primera coordenada  $x_1$  (véase la Figura 6).

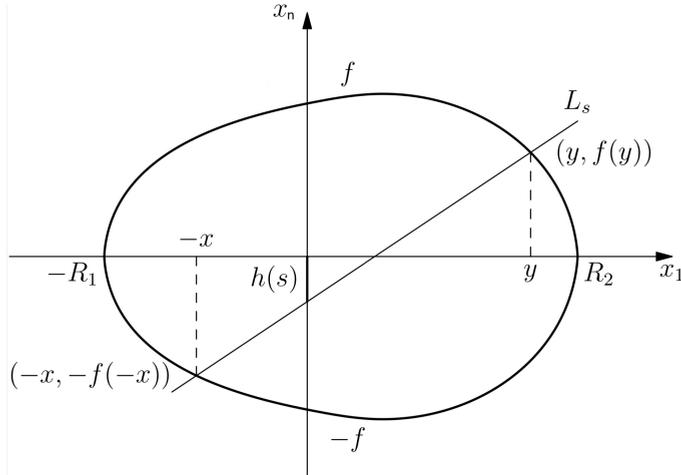


Figura 6: Construyendo el contraejemplo de Ryabogin en  $\mathbb{R}^n$ .

Debido a la simetría rotacional de  $K_f$ , a cada hiperplano de corte va a corresponder una línea en el plano  $x_1 x_n$ , que ahora pasamos a definir.

Dentro del plano  $x_1 x_n$ , para cada pendiente  $s \in [0, \infty)$  consideramos la línea  $L_s$  definida mediante  $x_n = L_s(x_1) := s x_1 + h(s)$ , para una cierta función diferenciable  $h(s)$  que se definirá más adelante. Denotaremos por  $H(L_s) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = L_s(x_1)\}$  al hiperplano perpendicular al plano  $x_1 x_n$  que pasa por  $L_s$ . Debido a la simetría de  $K_f$ , a cada uno de los hiperplanos de  $\mathbb{R}^n$  obtenidos por la rotación del hiperplano  $H(L_s)$  alrededor del eje  $x_1$  le corresponde la misma línea  $L_s$  en el plano  $x_1 x_n$ . Así, la línea  $L_s$  en el plano  $x_1 x_n$  representa a todos los hiperplanos obtenidos a partir de  $H(L_s)$  por rotación alrededor del eje  $x_1$ .

Para cada pendiente  $s \in (0, \infty)$ , la función  $f$  queda definida por los dos puntos  $(-x, -f(-x))$ ,  $(y, f(y))$  donde la gráfica de  $f$  corta a la línea  $L_s$  (véase la Figura 6, y observese que  $x$  e  $y$  dependen de  $s$ ). En efecto, se tiene que

$$L_s(t) = ts + h(s), \quad f(y(s)) = L_s(y(s)), \quad f(-x(s)) = L_s(-x(s)). \quad (7)$$

Por tanto, dada la colección de rectas  $\{L_s\}$  correspondiente a los hiperplanos de corte, las funciones  $x(s), y(s)$  determinan los valores de la función  $f$  por medio de las ecuaciones (7). En consecuencia, la frontera del cuerpo  $K_f$  queda definida completamente por  $\{x(s), y(s), h(s)\}$ .

Las condiciones analíticas que debe satisfacer el cuerpo  $K_f$  si flota de acuerdo con las leyes de Dupin se obtendrán usando el Segundo Teorema de Dupin y el Teorema 5, respectivamente. Según el Segundo Teorema de Dupin, el centro de masas de la superficie de corte  $K_f \cap H(\xi)$  se encuentra en el subespacio  $E = \lim_{\xi_n \rightarrow \xi} H(\xi_n) \cap H(\xi)$ ,

para cualquier sucesión de hiperplanos de corte que converge a  $H(\xi)$ . En nuestro caso, la familia de hiperplanos considerada es  $\{H(L_s)\}$ . Usando la ecuación de la correspondiente línea  $L_s$ , es posible calcular que el centro de masas de  $K_f \cap H(L_s)$  tiene coordenadas

$$(-h'(s), 0, \dots, 0, -s \cdot h'(s) + h(s)), \quad (8)$$

véase [17, Lema 2]. Por otro lado, el centro de masas también se puede calcular por medio de una integral. Así se obtiene que la primera coordenada del centro de masas satisface

$$-h'(s) = \frac{1}{|K_f \cap H(L_s)|} \int_{K_f \cap H(L_s)} x_1 dx_1 d\bar{x}, \quad (9)$$

donde  $\bar{x} = (x_2, \dots, x_n)$ . Observando que la sección de  $K_f \cap H(L_s)$  for el hiperplano  $H_t = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = t\}$  es una bola euclídea  $B(s, t)$  de dimensión  $n - 2$ , con centro en  $(t, 0, \dots, 0, L_s(t))$  y radio  $r = \sqrt{f^2(t) - L_s(t)^2}$ , la ecuación (9) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{K_f \cap H(L_s)} (t + h'(s)) dt d\bar{x} = \int_{-x(s)}^{y(s)} t dt \int_{B(s, t)} d\bar{x} \\ &= \kappa_{n-2} \int_{-x(s)}^{y(s)} (t + h'(s)) (f^2(t) - L_s(t)^2)^{\frac{n-2}{2}} dt. \end{aligned}$$

La ecuación

$$\int_{-x(s)}^{y(s)} (t + h'(s)) (f^2(t) - L_s(t)^2)^{\frac{n-2}{2}} dt = 0 \quad (10)$$

es la primera condición analítica que debe satisfacer el cuerpo  $K_f$ .

La segunda condición la impone el Teorema 5, según el cual todos los momentos de inercia con respecto a los planos coordenados de  $K_f \cap H(L_s)$  son iguales e independientes de  $s$ . Para un cuerpo de revolución, se puede calcular que los momentos de inercia con respecto a los  $n$  ejes coordenados vienen dados por

$$I_1 = \kappa_{n-2} \sqrt{(1 + s^2)^{3/2}} \int_{-x(s)}^{y(s)} (t + h'(s))^2 (f^2(t) - L_s(t)^2)^{\frac{n-2}{2}} dt, \quad (11)$$

y, para  $j = 2, \dots, n$ , son iguales y vienen dados por

$$I_j = \gamma_{n-2} \sqrt{(1 + s^2)} \int_{-x(s)}^{y(s)} (f^2(t) - L_s(t)^2)^{\frac{n}{2}} dt, \quad (12)$$

donde  $\kappa_n$  es el volumen de la bola unidad euclídea  $B_2^n$  de  $\mathbb{R}^n$ , y

$$\gamma_{n-2} = \int_{B_2^{n-2}} p_j^2 dp, \quad j = 2, \dots, n - 1.$$

Para los detalles, véase [17, Lema 2].

Las ecuaciones (10), (11), (12) tienen tres incógnitas,  $x(s)$ ,  $y(s)$ ,  $h(s)$ . En principio, podría parecer que la solución al problema de Ulam debería ser afirmativa.

Sin embargo, Ryabogin notó que dos cualesquiera de estas tres ecuaciones implican la tercera de ellas (véase [17, Lema 4]), y precisamente esta observación le condujo a buscar el contraejemplo. Así se obtiene la siguiente reformulación analítica del problema para cuerpos de revolución, donde hemos reescrito las ecuaciones (10) y (12) como las ecuaciones (13),(14).

PROPOSICIÓN 6. [17, Proposición 1] Sea  $m = n/2$ . Un cuerpo de revolución  $K_f$  de volumen 1 y densidad  $\frac{1}{2}$  flota en equilibrio en cualquier orientación si, para todo  $s > 0$

$$\int_{-x(s)}^{y(s)} (f^2(t) - L_s(t)^2)^{m-1} \frac{\partial L_s(t)}{\partial s} dt = 0, \tag{13}$$

$$\int_{-x(s)}^{y(s)} (f^2(t) - L_s(t)^2)^m dt = \frac{C}{\gamma_{n-2}\sqrt{1+s^2}}, \tag{14}$$

donde  $C$  es el valor constante de los momentos de inercia.

Para la esfera, la función  $f$  es  $f(x_1) = \sqrt{1 - x_1^2}$ ,  $h(s) = 0$  y  $x(s) = y(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ , donde  $s \in [0, \infty)$ . El primer paso de la construcción consiste en imponer que, para el cuerpo  $K_f$ ,  $x(s) = y(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$  para  $s \in [1, \infty)$ , lo que implica que la gráfica de  $f$  es el círculo unidad para  $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ . Puesto que la esfera de densidad  $1/2$  centrada en el origen flota en equilibrio, las funciones  $x, y$  satisfacen las ecuaciones integrales (13) y (14) para  $s \in [1, \infty)$ . Además  $h(s) = 0$  para dichos valores de  $s$ , de modo que los correspondientes hiperplanos de corte  $H(L_s)$  pasan por el origen.

En el segundo paso, se realiza la perturbación de la esfera, que se consigue eligiendo una función  $h(s)$  no nula, de clase  $C^\infty(0, \infty)$ , con soporte en el intervalo  $s \in [1 - 2\tau, 1 - \tau]$ . Diferenciando las ecuaciones (13) y (14)  $m$  veces, se reescriben como un sistema de ecuaciones integrales en las variables  $x(s), y(s), x'(s), y'(s)$ , cuya matriz en el punto  $s = 1$  tiene determinante no nulo. Esto permite construir una solución perturbada del sistema en el intervalo  $[1 - 3\tau, 1]$ , donde  $\tau$  es muy pequeño. Se comprueba que la solución perturbada sigue satisfaciendo las ecuaciones (13) y (14), con tal de que la función  $h$  y sus derivadas sean suficientemente próximas a cero. Esto garantiza que el cuerpo seguirá flotando en equilibrio cuando el hiperplano de corte corresponda a  $L_s$  con  $s \in [1 - \tau, 1]$ .

El tercer paso, cuando la dimensión es par, consiste en comprobar que la solución perturbada regresa al círculo unidad. Esto queda garantizado por las propias condiciones de flotación (13) y (14), que la solución perturbada sigue satisfaciendo. En concreto, diferenciando las ecuaciones (13) y (14) y usando el hecho de que la función  $h$  es cero en el intervalo  $s \in [1 - 3\tau, 1 - 2\tau]$ , se comprueba con facilidad que  $x(s) = y(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$  para  $s \in [1 - 3\tau, 1 - 2\tau]$ .

Esto permite extender la definición de  $x(s), y(s)$  correspondiente a la esfera unidad también para  $s \in (0, 1 - 3\tau)$ , y finalmente comprobar que el cuerpo de revolución sigue satisfaciendo las ecuaciones (13) y (14) para estas pendientes. Dicha comprobación es necesaria, pues obsérvese que la intersección de  $K_f$  con un hiperplano de corte correspondiente a una pendiente  $s \in (0, 1 - 3\tau)$  no es un círculo, debido a la rotación alrededor del eje  $x_1$  de la zona perturbada para los valores de  $s \in [1 - 3\tau, 1 - 2\tau]$ .

El caso de dimensión impar es demasiado técnico para este artículo divulgativo; en él, los efectos de la perturbación inicial en la frontera del cuerpo convexo se dejan sentir incluso fuera de su soporte, y el análisis es más complicado. La solución perturbada no regresa por sí misma al círculo unidad. Aún así, se puede definir el resto del cuerpo convexo para las pendientes  $s \in [0, 1 - 3\tau]$  de tal modo que sea convexo y siga verificando las ecuaciones de flotación. El lector interesado puede leer los detalles de este caso en el artículo original [17].

## 4. PROBLEMAS RELACIONADOS

En esta sección presentamos algunos problemas relacionados con el problema de Ulam. Antes de ello, recordamos de nuevo al lector que el problema original sigue abierto, en todas las dimensiones, pues sólo se tienen resultados para algunos valores concretos de la densidad.

### 4.1. EL PROBLEMA DE ULAM EN DIMENSIÓN 2

El problema de Ulam tiene una versión bidimensional muy interesante. En este caso, los cuerpos flotantes son “troncos” o cilindros con secciones transversales de distintas formas, y se trata de caracterizar las secciones transversales para las que el cilindro correspondiente flota en equilibrio en cualquier orientación, manteniendo su eje longitudinal en posición horizontal.

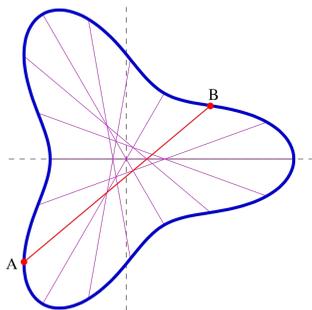


Figura 7: Curva de Zindler.

En 1938, Auerbach [1] encontró contraejemplos, tanto convexos como no convexos, para la variante bidimensional del problema cuando la densidad es  $1/2$ , es decir, para troncos que flotan con la mitad de su volumen bajo el líquido. La curva que delimita la sección transversal de estos contraejemplos es una *curva de Zindler*. Las curvas de Zindler se definen por la propiedad de que todas las cuerdas que dividen el perímetro en dos tienen igual longitud. Esta definición es equivalente a que todas las cuerdas que dividen el interior de la curva en dos partes de igual área tengan la misma longitud. La figura 7 muestra una curva de Zindler (no convexa), cuya ecuación paramétrica es

$$z(u) = e^{2iu} + 2e^{-iu} + ae^{iu/2},$$

con  $a = 8$ . Si la constante  $a$  es mayor o igual que 24, la curva de Zindler delimita un cuerpo convexo.

Por otro lado, Wegner [27, 28] ha construido contraejemplos para otras densidades específicas en  $(0, 1/2)$ .

Bracho, Montejano y Oliveros [3] demostraron que si la densidad perimétrica (no de área) es  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/5$  y  $2/5$ , el círculo es la única forma posible para la sección transversal de los cilindros que flotan en equilibrio. El problema general en dos dimensiones permanece abierto.

#### 4.2. EL RESULTADO AFIRMATIVO PARA CUERPOS CONVEXOS CON SIMETRÍA CENTRAL

En esta sección reproducimos la demostración de Falconer en  $\mathbb{R}^3$  del resultado positivo al problema de Ulam en el caso de simetría central y densidad  $1/2$ . La herramienta principal para la demostración son los armónicos esféricos  $S_m(\theta)$ , que se pueden considerar la generalización a dimensión mayor de  $\cos mt$  y  $\sin mt$  en las series de Fourier. Una referencia magnífica para ellos es el libro de Groemer [11]. El uso de los armónicos esféricos para resolver sistemáticamente problemas de geometría convexa fue introducido por Schneider [19].

Dada una función *razonable* en la esfera, los armónicos esféricos permiten escribir  $f$  como una serie, de forma análoga a lo que sucede con el desarrollo de Fourier. Más precisamente, obtenemos que  $f = \sum_0^\infty c_m S_m(\theta)$ , donde  $S_m(\theta)$  es un armónico esférico de grado  $m$ . Para la demostración es importante observar que los armónicos esféricos de grado par son funciones pares, y los de grado impar son funciones impares en la esfera.

El teorema de Funk-Hecke, fundamental en la teoría de armónicos esféricos, establece que si  $g$  es una función de  $L^1$  en el intervalo  $[-1, 1]$ , entonces

$$\int_{S^{n-1}} g(\langle \theta, \psi \rangle) S_m(\theta) d\theta = \lambda_m S_m(\psi)$$

para todo  $\psi \in S^{n-1}$ , donde el autovalor  $\lambda_m$  viene dado por la fórmula

$$\lambda_m = a_m \int_{-1}^1 g(x) \frac{d^m}{dx^m} (1-x^2)^{m+(1/2)n-3/2} dx$$

y  $a_m$  es un número real distinto de cero.

Usando este resultado, la completitud de los armónicos esféricos y el anteriormente mencionado hecho de que un esférico armónico es una función par o impar según la paridad del grado del mismo, Falconer [8] establece condiciones que proporcionan una forma de decidir si una función es par o impar. El siguiente caso particular de dichas condiciones es fundamental para la demostración que queremos presentar.

**PROPOSICIÓN 7.** [8, p. 691] *Dada una función  $f$  continua en la esfera, que satisface  $\int_{\langle \theta, \psi \rangle \geq 0} f(\theta) |\langle \theta, \psi \rangle|^k d\theta = 0$  para todo  $\psi \in S^{n-1}$  y algún número natural  $k \geq 0$ , se tiene que la paridad de  $f$  viene determinada por la paridad de  $k$ . En concreto, si  $k$  es impar,  $f(\theta)$  es una función impar, y si  $k$  es par,  $f(\theta)$  es una función par.*

La demostración de Falconer para el problema de Ulam es una aplicación directa del resultado anterior, y la definición de flotación en equilibrio.

**TEOREMA 8.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^3$  un cuerpo convexo y simétrico, con densidad  $1/2$  y tal que flota en equilibrio en cualquier dirección. Entonces  $K$  es esférico.*

**DEMOSTRACIÓN.** En primer lugar, y sin pérdida de generalidad, suponemos que el centro de simetría es el origen. Sea  $f$  la función radial que define al cuerpo convexo  $K$ , esto es,

$$f(\xi) = \text{máx}\{t : t\xi \in K\}$$

para  $\xi \in S^{n-1}$ . Supongamos que  $\xi \in S^{n-1}$  es un vector en la semiesfera sur. Al flotar  $K$  en equilibrio en todas direcciones, y considerando  $\xi$  como dirección, la parte sumergida de la superficie de  $K$  es precisamente la parte de la superficie de  $K$  para la que se cumple  $x \cdot \xi > 0$ .

La flotación en equilibrio puede darse sólo si los centros de masas de las partes sumergidas están a profundidad constante. Esto último se puede argumentar como sigue. Ya que  $K$  simétrico y con densidad  $1/2$ , su centro de masas es necesariamente el origen y por ello, todos los hiperplanos de corte pasan por el origen, lo que implica que la superficie de centros es simétrica con respecto al origen. Como  $K$  flota en equilibrio en todas direcciones, la Proposición 1 nos asegura que la superficie de centros es una esfera y por ello, la profundidad del centro de masas de las partes sumergidas es constante.

Es importante observar que si el cuerpo no fuera simétrico en el origen, o si su densidad no fuera  $1/2$ , no tendríamos garantizado que la superficie de centros fuese una esfera centrada en el origen.

En lo que sigue probaremos que  $f(\theta)$  es constante y con ello que  $K$  es esférico. Comenzamos notando que la integral del centro de masas de la parte sumergida puede escribirse como

$$2 \int_{K \cap H^-(\xi)} x dx = 2 \int_{S^2 \cap H^-(\xi)} \theta d\theta \int_0^{f(\theta)} r^3 dr = \frac{1}{2} \int_{S^2 \cap H^-(\xi)} \theta f(\theta)^4 d\theta,$$

donde  $r^3$  se obtiene de la variable  $x = r\theta$  y del Jacobiano del cambio de variable en  $\mathbb{R}^3$ . Dado que sólo consideramos la profundidad, nos basta con la última coordenada del centro de masas, que no es más que la proyección del mismo sobre el vector unitario  $\xi$ . Por tanto, tomando el producto escalar se obtiene que para todo  $\xi$  en la esfera

$$\int_{S^2 \cap H^-(\xi)} \langle \theta, \xi \rangle f(\theta)^4 d\theta = \int_{\langle \theta, \xi \rangle \geq 0} |\langle \theta, \xi \rangle| f(\theta)^4 d\theta = c,$$

donde  $c$  es una constante. Por tanto,

$$\int_{\langle \theta, \xi \rangle \geq 0} |\langle \theta, \xi \rangle| [f(\theta)^4 - k] d\theta = 0,$$

y usando ahora la Proposición 7, obtenemos que  $f(\theta)$  es una función constante, luego  $K$  es esférico.  $\square$

Existe una demostración alternativa para cuerpos simétricos que no hace uso de los armónicos esféricos y solamente utiliza técnicas de geometría convexa [13]. En el mencionado artículo, Miroschnyenko, Ryabogin y Saroglou plantean el siguiente problema: “Si un cuerpo convexo con simetría central tiene la propiedad de que todas las secciones por hiperplanos que pasen por el centro están en posición isotrópica, entonces  $K$  es esférico”. La condición sobre la posición isotrópica es equivalente a que los momentos de inercia sean constantes e iguales en todas direcciones, que como hemos visto en la Sección 2 (Teorema 5), caracteriza el problema de Ulam. El interés en esta demostración radica en la posibilidad de que sus métodos puedan ser útiles en el estudio del problema de Ulam para densidades distintas a  $1/2$ , para las que los armónicos esféricos parecen no funcionar.

#### 4.3. EL CUERPO DE FLOTACIÓN

El *cuerpo de flotación* de un cuerpo convexo  $K$  de volumen 1 y densidad  $\delta \in (0, 1/2]$  se define como

$$K_\delta = \bigcap_{\xi \in S^{n-1}} H^+(\xi, t(\xi)), \quad (15)$$

donde

$$\text{vol}_n(K \cap H^-(\xi, t(\xi))) = \delta.$$

Dupin lo introdujo originalmente en [7], con una definición algo distinta, como el cuerpo cuya frontera es la envolvente de las superficies del líquido  $\{H(\xi, t(\xi))\}_{\xi \in S^{n-1}}$ . Sin embargo, cuando  $K$  carece de simetría central, la envolvente puede resultar no convexa para valores de  $\delta$  próximos a  $1/2$ . Para subsanar este problema, la definición (15) del cuerpo de flotación fue introducida independientemente en [2] y en [20]. Dicha definición coincide con la de Dupin para  $\delta$  suficientemente pequeño, y tiene la ventaja de que  $K_\delta$  es convexo para cualquier valor de  $\delta$ , por ser intersección de semiespacios.

Los teoremas de Dupin muestran que existe una íntima relación entre un cuerpo  $K$ , su superficie de centros  $\mathcal{S}$  y su cuerpo de flotación  $K_\delta$ . Aunque en las secciones 2 y 3, el cuerpo de flotación no ha sido definido explícitamente, dichos teoremas relacionan implícitamente a  $K_\delta$  con  $K$  y  $\mathcal{S}$ .

Así como la superficie de centros no ha sido muy estudiada (salvo en el caso  $\delta = 1/2$ , donde se la conoce como *el cuerpo de centroides* [10, Cap. 9]), existe una amplia literatura sobre el cuerpo de flotación y sus propiedades, y sigue siendo objeto de investigación actualmente. Entre las varias aplicaciones del cuerpo de flotación citaremos su papel en la definición de versiones invariantes bajo transformaciones afines de conceptos geométricos, como el área afín de superficie [22]; su uso para obtener nuevos teoremas de aproximación de cuerpos convexos por polítopos [16], o para el análisis de profundidad de datos en estadística [15].

Un conocido problema abierto sobre el cuerpo de flotación, también conocido como la conjetura de la homotecia, pregunta si un cuerpo convexo cuyo cuerpo de flotación es homotético a sí mismo para algún valor  $\delta$  es necesariamente un elipsoide.

Schütt y Werner dieron en [21] una respuesta positiva parcial a esta pregunta, probando que si existe una sucesión de valores  $\delta_j \rightarrow 0$ , de forma que  $K_{\delta_j}$  es homotético a  $K$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ , entonces  $K$  es un elipsoide. En [23, 24], Stancu demostró que si el cuerpo  $K$  tiene frontera suficientemente suave y existe un número real positivo suficientemente pequeño  $\delta(K)$  tal que  $K$  y  $K_{\delta(K)}$  son homotéticos, entonces  $K$  es un elipsoide. En [29], Werner y Ye obtuvieron una respuesta afirmativa dentro de la familia de las bolas unidad de  $L^p$ , así como el resultado afirmativo para cuerpos convexos generales si  $\delta$  es suficientemente pequeño. Pero en general, la conjetura sigue abierta.

La construcción del contraejemplo al problema de Ulam ha vuelto a sacar a la luz los teoremas de Dupin, que habían caído en un cierto olvido entre los geómetras y analistas que estudian problemas de convexidad. Nos parece oportuno concluir con la observación de Ryabogin de que, para avanzar en la investigación sobre estos problemas es necesario y natural a la luz de los teoremas de Dupin estudiar conjuntamente los tres cuerpos  $K$ ,  $K_\delta$  y  $\mathcal{S}$ , en lugar de centrarse únicamente en  $K$  y  $K_\delta$ , o en  $K$  y  $\mathcal{S}$ , como se había hecho hasta ahora.

## ATRIBUCIÓN DE LAS FIGURAS

Las Figuras 1, 5 y 6 aparecen en el artículo [17] y aquí las usamos con el permiso del autor. La Figura 7 está tomada de Wikimedia, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=66241197>, (by Ag2gaeh - Own work, CC BY-SA 4.0).

## AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al referee sus comentarios y sugerencias, gracias a los cuales la exposición es ahora mucho más clara.

## REFERENCIAS

- [1] H. AUERBACH, Sur un problème de M. Ulam concernant l'équilibre des corps flottants, *Studia Math.* **7** (1938), no. 1, 121–142.
- [2] I. BÁRÁNY, D. G. LARMAN, Convex bodies, economic cap coverings, and random polytopes, *Mathematika* **35** (1988), no. 2, 274–291.
- [3] J. BRACHO, L. MONTEJANO, D. OLIVEROS, Carousels, Zindler curves and the floating body problem, *Period. Math. Hungar* **49** (2004), no. 2, 9–23.
- [4] C.-J. DE LA VALLÉE-POUSSIN, *Lessons de Mécanique Analytique, vol II*, Paris, Gautier Villiers Editeur, Louvain (1925).
- [5] M. DO CARMO, *Geometría diferencial de curvas y superficies*, Alianza Editorial (1995).
- [6] C. DUPIN, *Développements de Géométrie* (1813), disponible en <https://books.google.com/books?id=2woGmSjZikcC>

- [7] C. DUPIN, *Applications de Géométrie et de Mécanique*, Paris (1822), disponible en <https://books.google.com/books?id=QKL2SpP0JuMC>
- [8] K. J. FALCONER, Applications of a Result on Spherical Integration to the Theory of Convex Sets, *Amer. Math. Monthly* **90** (1983), no. 10, 690–693.
- [9] D. I. FLORENTIN, C. SCHÜTT, E. WERNER, N. ZHANG, Convex floating bodies in Equilibrium, *Proc. Amer. Math. Soc.* **150** (2022), 3037–3048.
- [10] R. J. GARDNER *Geometric tomography*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 58 (2006), Cambridge University Press.
- [11] H. GROEMER *Geometric applications of Fourier series and spherical harmonics*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [12] H. HUANG, B. SLOMKA, E. WERNER, Ulam floating bodies, *J. of London Math. Soc.* **100** (2019), no. 2, 425–446.
- [13] S. MYROSHNYCHENKO, D. RYABOGIN, C. SAROGLUO, Star bodies with completely symmetric sections, *International Mathematics Research Notices* **10** (2019), 3015–3031.
- [14] F. NAZAROV, D. RYABOGIN, A. ZVAVITCH, An assymmetric convex body with maximal sections of constant volume, *J. Amer. Math. Soc.* **27** (2014), no. 1, 43–68.
- [15] S. NAGY, C. SCHÜTT, E. WERNER, Halfspace depth and floating body, *Stat. Surv.* **13** (2019), 52–118.
- [16] J. PROCHNO, C. SCHÜTT, E. WERNER, Best and random approximation of a convex body by a polytope, *J. Complexity* **71** (2022), paper no. 101652, 19pp.
- [17] D. RYABOGIN, A negative answer to Ulam’s problem 19 from the Scottish Book, *Ann. of Math. (2)* **195** (2022), no. 3, 1111–1150.
- [18] D. RYABOGIN, On bodies floating in equilibrium in every orientation, *Geom Dedicata* **217**, 70 (2023). <https://doi.org/10.1007/s10711-023-00807-w>
- [19] R. SCHNEIDER, Functional equations connected with rotations and their geometric applications, *Enseign. Math. (2)* **16** (1970), 297–305.
- [20] C. SCHÜTT, E. WERNER, The convex floating body, *Math. Scand.* **66** (1990), no. 2, 275–290.
- [21] C. SCHÜTT, E. WERNER, Homothetic floating bodies, *Geom. Dedicata* **49** (1994), no. 3, 335–348.
- [22] C. SCHÜTT, E. WERNER, Affine surface area, <https://arxiv.org/abs/2204.01926>
- [23] A. STANCU, The floating body problem, *Bull. London Math. Soc.* **38** (2006), no. 5, 839–846.
- [24] A. STANCU, Two volume product inequalities and their applications, *Canad. Math. Bull.*, **52** (2009), no. 3, 464–472.
- [25] S. ULAM, *A collection of mathematical problems*, Interscience, New York (1960).
- [26] P. L. VÁRKONYI, Neutrally floating objects of density 1/2 in three dimensions, *Stud. Appl. Math.* **130** no. 3 (2013), 295–315.

- [27] F. WEGNER, Floating bodies of equilibrium, *Stud. Appl. Math.* **111** no. 2 (2003), 167–183.
- [28] F. WEGNER, Floating bodies in equilibrium in 2D, the tire track problem and electrons in a parabolic magnetic field, <https://arxiv.org/abs/physics/0701241>
- [29] E. WERNER, D. YE, On the Homothety Conjecture, *Indiana Univ. Math. J.* **60** (2011), no. 1, 1–20.
- [30] [http://kielich.amu.edu.pl/Stefan\\_Banach/e-scottish-book.html](http://kielich.amu.edu.pl/Stefan_Banach/e-scottish-book.html)

M<sup>a</sup> ANGELES ALFONSECA, NORTH DAKOTA STATE UNIVERSITY  
Correo electrónico: [maria.alfonseca@ndsu.edu](mailto:maria.alfonseca@ndsu.edu)

EUGENIA SAORÍN GÓMEZ, UNIVERSITÄT BREMEN  
Correo electrónico: [esaoring@uni-bremen.de](mailto:esaoring@uni-bremen.de)